Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

AM110 - Analisi Matematica 1- Tutorato VII

DOCENTE: PROF. PIERPAOLO ESPOSITO

TUTORI: A. MAZZOCCOLI, M. NANNI

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1. Discutere la convergenza delle seguenti serie numeriche.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2} :$$

La serie è a termini positivi e il termine generale decrescente, applichiamo dunque il criterio di condensazione di Cauchy. Basterà studiare la serie trasformata:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot \frac{n \log 2}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \log 2}{2^n}$$

Usiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n \log 2}{2^n}} = \frac{1}{2}$$

La serie converge e dunque converge anche la nostra serie di partenza.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{\log n}} :$$

La serie è a termini positivi e il termine generale è decrescente, applichiamo allora il criterio di condensazione di Cauchy. Basta studiare la serie trasformata:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n\sqrt{n \log 2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{\log 2}}$$

Per confronto con la serie armonica, risulta:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{\log 2}} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{\log 2}} > +\infty$$

Dunque la nostra serie diverge.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n+1} :$$

Usiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} \cdot \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2n+1}} = \frac{1}{2}$$

Quindi la nostra serie converge.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n^2+1}{n^4+n+1}$$

Vediamo che $\dfrac{5n^2+1}{n^4+n+1}$ è asintoticamente equivalente a $\dfrac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{5n^2+1}{n^4+n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^4+n^2}{n^4+n+1} = 5.$$

Allora, avremo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n^2+1}{n^4+n+1} \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Per confronto asintotico dunque la nostra serie converge.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

Vediamo che $\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ è asintoticamente equivalente a $\dfrac{1}{n^3}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^4+n^3}{n^4+2n^3+n^2} = 2.$$

Allora, avremo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty.$$

Dunque la nostra serie converge per confronto asintotico.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

Usiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{3} = \frac{1}{3}.$$

Dunque la nostra serie converge.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2+n}$$

Vediamo che $\dfrac{2}{n^2+n}$ è asintoticamente equivalente a $\dfrac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2}{n^2+n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^2+n} = 2.$$

Allora:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2+n} \approx \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Per confronto asintotico la nostra serie converge.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$$

Usiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+3n^2+3n+1}{n^4+n^3} = 0.$$

Quindi la nostra serie converge.

<u>Esercizio 2.</u> Discutere le seguenti serie numeriche dipendenti da parametro.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^{\sqrt{n}} \quad \alpha > 0:$$

Osserviamo innanzitutto che la serie non converge se $\alpha \geq 1$ poiché non sarebbe verificata la condizione necessaria $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Per $0 < \alpha < 1$ notiamo che la serie è a termini positivi, decrescente e dunque è possibile sfruttare il criterio di condensazione di Cauchy. Non resta quindi che studiare la convergenza di:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \alpha^{2^{\frac{n}{2}}}$$

Applichiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n \alpha^{2^{\frac{n}{2}}}} = 2\alpha^{(\frac{2^{\frac{n}{2}}}{n})} = 0 \quad se \quad 0 < \alpha < 1.$$

La nostra serie quindi converge proprio per gli α compresi tra 0 e 1.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}} \quad x > 1:$$

Prima di tutto notiamo che se $1 < x < e$ abbiamo $0 < \log x \leq 1$, per cui la serie non converge. Infatti se così fosse avremmo $\dfrac{1}{\log x} \geq 1$ e dunque la serie non soddisferebbe la condizione necessaria $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Se $x > e$ osserviamo che la serie è a termini positivi, decrescente, per cui possiamo utilizzare il criterio di condensazione di Cauchy. Ci basta dunque studiare la convergenza di:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(\log x)^{n \log 2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{(\log x)^{\log 2}} \right)^n$$

Questa è una serie geometrica di ragione $\frac{2}{(\log x)^{\log 2}}$., che quindi converge $\Leftrightarrow 2 < (\log x)^{\log 2} \Leftrightarrow e < \log x \Leftrightarrow e^e < x$.

<u>Esercizio 3.</u> Dire per quali $\alpha \neq 0$ la seguente serie numerica converge.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\alpha^{2n}}{n} + \frac{n^{2\alpha}}{\alpha} \right)$$

Basta studiare separatamente il primo e il secondo membro della somma e vedere per quali α entrambi risultano essere serie convergenti. Per il primo membro applichiamo il criterio del rapporto nel modo seguente:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha^{2n+2}}{n+1} \cdot \frac{n}{\alpha^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \alpha^2 \cdot \frac{n}{n+1} = \alpha^2.$$

Il primo membro dunque converge $\Leftrightarrow \alpha^2 < 1 \Leftrightarrow |\alpha| < 1$.
Il secondo membro invece, per confronto con la serie armonica generalizzata $\frac{1}{n^\beta}$ converge $\Leftrightarrow -2\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < -\frac{1}{2}$.
I valori di α che soddisfano le condizioni di convergenza per ambo i membri della serie sono quindi gli α compresi tra -1 e -$\frac{1}{2}$.

<u>Esercizio 4.</u> Dire per quali $\beta \in \mathbb{R}$ la seguente serie numerica converge.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n^2-1)^\beta}{5^n} \cdot \cos 3n$$

Vediamo innanzitutto che:

$$\Big| \frac{(n^2-1)^\beta}{5^n} \cdot \cos 3n \Big| \leq \frac{(n^2-1)^\beta}{5^n}$$

Studiamo ora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(n^2-1)^\beta}{5^n}$ applicando il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(n^2-1)^\beta}{5^n}} = \frac{1}{5} \lim_{n\to+\infty} e^{(\frac{\beta}{n})\log n^2-1} = \frac{1}{5} < 1.$$

La serie converge $\forall \beta \in \mathbb{R}$ e dunque, sfruttando il criterio del confronto anche la nostra serie di partenza converge $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

<u>Esercizio 5.</u> Studiare il comportamento della seguente successione definita per ricorrenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$a_1 = \alpha, \qquad a_{n+1} = \sqrt{2a_n - {a_n}^2}$$

Prima di tutto imponiamo che $2\alpha - \alpha^2 \geq 0$ e questa condizione ci porta a considerare solo gli $\alpha \in [0,2]$, termini iniziali per cui la nostra successione è definita. Ora notiamo che se $\alpha = 0, 2$ la successione a_n è identicamente nulla, mentre se $\alpha = 1$ la nostra successione vale identicamente 1. Vediamo poi che per $\alpha \in (0,1)$ la successione è crescente con limite in 1. Infine osserviamo che per $\alpha \in (1,2)$ il secondo termine della successione apparterrà sempre a $(0,1)$ e dunque a meno del primo termine anche in questo caso avremo una successione crescente con limite in 1.